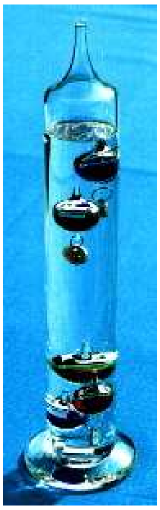
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

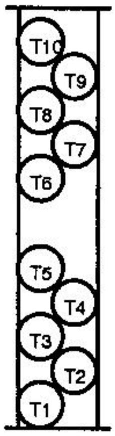
Premier Cycle **Année 2004-2005**

INCERTITUDES ET UNITES

par

Michel PEREZ
Maître de Conférences





TSI — Première année

Chapitre 1

Situations-Problèmes

1.1 Mesure de distance

Some time ago I received a call from a colleague. He was about to give a student a zero for his answer to a physics question, while the student claimed a perfect score. The instructor and the student agreed to an impartial arbiter, and I was selected.

I read the examination question : "Show how it is possible to determine the height of a tall building with the aid of a barometer." The student had answered : "Take the barometer to the top of the building, attach a long rope to it, lower it to the street, and then bring it up, measuring the length of the rope. The length of the rope is the height of the building."

The student really had a strong case for full credit since he had really answered the question completely and correctly ! On the other hand, if full credit were given, it could well contribute to a high grade in his physics course and certify competence in physics, but the answer did not confirm this.

I suggested that the student have another try. I gave the student six minutes to answer the question with the warning that the answer should show some knowledge of physics. At the end of five minutes, he hadn't written anything. I asked if he wished to give up, but he said he had many answers to this problem ; he was just thinking of the best one. I excused myself for interrupting him and asked him to please go on.

In the next minute, he dashed off his answer, which read : "Take the barometer to the top of the building and lean over the edge of the roof. Drop the barometer, timing its fall with a stopwatch. Then, using the formula $x = 0.5 * a * t^2$, calculate the height of the building." At this point, I asked my colleague if he would give up. He conceded, and gave the student almost full credit.

While leaving my colleague's office, I recalled that the student had said that he had other answers to the problem, so I asked him what they were.

"Well," said the student, "there are many ways of getting the height of a tall building with the aid of a barometer.

For example, you could take the barometer out on a sunny day and measure the height of the barometer, the length of its shadow, and the length of the shadow of the building, and by the use of simple proportion, determine the height of the building."

"Fine," I said, "and others ?"

"Yes," said the student, "there is a very basic measurement method you will like. In this method, you take the barometer and begin to walk up the stairs. As you climb the stairs, you mark off the length of the barometer along the wall. You then count the number of marks, and this will give you the height of the building in barometer units." "A very direct method."

"Of course. If you want a more sophisticated method, you can tie the barometer to the end of a string, swing it as a pendulum, and determine the value of g [gravity] at the street level and at the top of the building. From the difference between the two values of g, the height of the building, in principle, can be calculated."

"On this same tack, you could take the barometer to the top of the building, attach a long rope to it, lower it to just above the street, and then swing it as a pendulum. You could then calculate the height of the building by the period of the precession".

"Finally," he concluded, "there are many other ways of solving the problem. Probably the best," he said, "is to take the barometer to the basement and knock on the superintendent's door. When the superintendent answers, you speak to him as follows : 'Mr. Superintendent, here is a fine barometer. If you will tell me the height of the building, I will give you this barometer."

At this point, I asked the student if he really did not know the conventional answer to this question. He admitted that he did, but said that he was fed up with high school and college instructors trying to teach him how to think.

Pour l'anecdote, l'étudiant était Niels Bohr[1] et l'arbitre Rutherford[2]. Expliquer les huit façons de mesurer la hauteur du bâtiment. Présenter les lois physiques mises en jeux et évaluer les incertitudes pour chaque méthode...

1.2 Thermomètre de Galilée

Le but de ce problème est d'étudier le principe de fonctionnement des thermomètres de Galilée. Ces objets décoratifs sont constitués d'une colonne de verre remplie d'un liquide (L) dilatable dans lequel flottent (ou coulent) de petites ampoules marquées chacune d'une température différente. On lit alors la température T_i ambiante (qui est aussi celle de (L)) sur l'ampoule flottante la plus basse (par exemple T6 sur la figure ci-contre).

Expliquer le phénomène "magique" en présentant les lois physiques qui sont nécessaires. Évaluer l'incertitude de la mesure.

1.3 Mesure de températures

Comment peut-on mesurer une température ?

Quels instruments utiliser ? quelle en est la précision ? Quelles sont les différentes unités de mesure de température ?

[1]Prix Nobel de Physique en 1922

[2]Prix Nobel de Chimie vers 1910

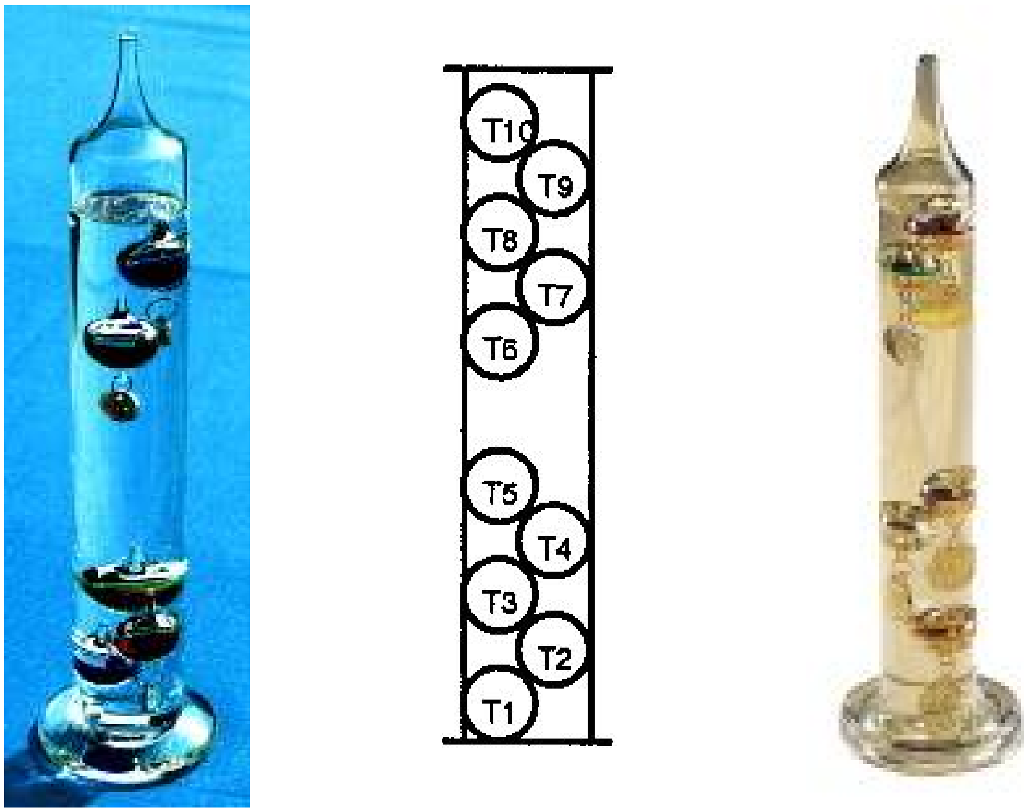


Fig. 1.1: Thermomètre de Galilée.

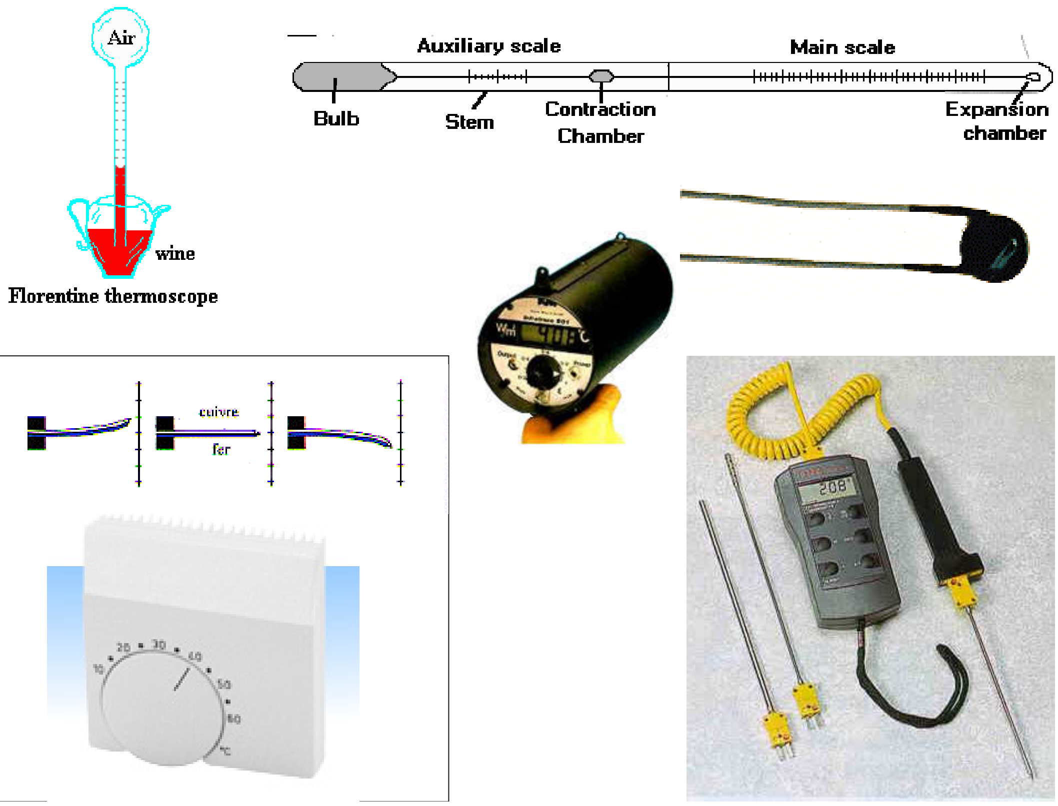


Fig. 1.2: Que sont ces instruments de mesure de température ? Quel est le principe de mesure ? Quelle en est la précision ?

Chapitre 2

Mesure et unités

Toute mesure suppose la définition d'une valeur de référence, l'étalon, pour la grandeur concernée, qui prend le nom d'unité pour une réalisation particulière. Par exemple, la mesure des longueurs a été longtemps fondée sur un mètre étalon constitué par une barre de platine iridié sur laquelle étaient tracés deux traits, la distance entre ces traits étant par définition l'unité de longueur : le mètre.

2.1 Les systèmes d'unités

La description du monde physique a conduit à définir et à utiliser de nombreuses grandeurs, donc a priori autant d'étalons et d'unités.

2.1.1 Unités fondamentales et unités dérivées

Cependant les théories ont montré que ces diverses grandeurs n'étaient pas indépendantes et qu'il suffisait de définir un nombre limité d'unités dites fondamentales, les autres unités étant dérivées grâce à l'existence de relations mathématiques entre les grandeurs. Par exemple, la vitesse peut se mesurer avec une unité dérivée des unités fondamentales de distance et de temps : la vitesse (v) est liée à la distance (d) et au temps (t) par la relation $v = d/t$.

Un système d'unités est donc constitué par un ensemble d'unités fondamentales et d'unités dérivées. Par ailleurs, il doit être complet - les unités fondamentales doivent permettre, par dérivation, de mesurer toutes les grandeurs - et cohérent - une unité fondamentale ne doit pas pouvoir être définie à partir des autres unités fondamentales.

Actuellement, il existe sept unités fondamentales : le mètre (longueur ; symbole : m), le kilogramme (masse ; symbole : kg), la seconde (temps ; symbole : s), l'ampère (intensité de courant électrique ; symbole : A), le kelvin (température ; symbole : K), la candela (intensité lumineuse ; symbole : cd) et la mole (quantité de matière ; symbole : mol) - cette dernière n'a fait son entrée dans le système international d'unités qu'en 1971. Il faut également noter que, pour des raisons pratiques, on définit des multiples et sous-multiples des unités fondamentales et dérivées (1 km = 10^3 m, et 1 nm = 10^{-9} m).

Les "devoirs" d'un étalon de mesure L'étalon doit permettre, à une époque donnée, les mesures les plus exactes et les plus précises. La même unité peut être liée à des étalons successifs et différents. Par ailleurs, il doit être autant que possible inaltérable et faire appel à des phénomènes naturels bien reproductibles et contrôlables. Mais cela n'est pas toujours possible : c'est ainsi que le kilogramme est encore défini par la masse d'un prototype matériel.

Décret relatif aux poids et aux mesures — 18 germinal an 3 (7 avril 1795)

Art. 1 er. L'époque prescrite par le décret du 1er août 1793 pour l'usage des nouveaux poids et mesures est prorogée, quant à sa disposition obligatoire, jusqu'à ce que la Convention Nationale y ait statué de nouveau en raison des progrès de la fabrication ; les citoyens sont cependant invités de donner une preuve de leur attachement à l'unité et à l'indivisibilité de la République en se servant dès à présent des nouvelles mesures dans leurs calculs et transactions commerciales.

2. Il n'y aura qu'un seul étalon des poids et mesures pour toute la République : ce sera une règle de platine sur laquelle sera tracé le mètre qui a été adopté pour l'unité fondamentale de tout le système des mesures. Cet étalon sera exécuté avec la plus grande précision, d'après les expériences et les observations des commissaires chargés de sa détermination ; il sera déposé prés du Corps Législatif, ainsi que le procès-verbal des opérations qui auront servi à le déterminer, afin qu'on puisse les vérifier dans tous les temps.

3. Il sera envoyé dans chaque chef-lieu de district un modèle conforme à l'étalon prototype dont il vient d'être parlé, et en outre un modèle de poids exactement déduit du système des nouvelles mesures. Ces modèles serviront à la fabrication de toutes les sortes de mesures employées aux usages des citoyens.

4. L'extrême précision qui sera donnée à l'étalon en platine ne pouvant pas influer sur l'exactitude des mesures usuelles, ces mesures continueront d'être fabriquées d'après la longueur du mètre adopté par les décrets antérieurs.

5. Les nouvelles mesures seront distinguées dorénavant par le surnom de républicaines ; leur nomenclature est définitivement adoptée comme il suit : On appellera : Mètre, la mesure de longueur égale à la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle boréal et l'équateur. Are, la mesure de superficie, pour les terrains, égale à un carré de dix mètres de côté. Stère la mesure destinée particulièrement aux bois de chauffage, et qui sera égale au mètre cube. Litre, la mesure de capacité, tant pour les liquides que pour les matières sèches, dont la contenance sera celle du cube de la dixième partie du mètre. Gramme, le poids absolu d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième partie du mètre , et à la température de la glace fondante. Enfin, l'unité des monnaies prendra le nom de franc, pour remplacer celui de livre usité jusqu'aujourd'hui.

6. La dixième partie du mètre se nommera décimètre et sa centième partie centimètre. On appellera décamètre une mesure égale à dix mètres : ce qui fournit un mesure très commode pour l'arpentage. Hectomètre signifiera la longueur de cent mètres. Enfin, kilomètre et ,.myriamètre seront des longueurs de mille et dix mille mètres, et désigneront principalement les mesures itinéraires.

Voici un petit historique du mètre, du kilogramme et de la seconde :

– 1795 : Le mètre est défini comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre. La définition de l'unité de poids lui est reliée, c'est le poids du décimètre cube d'eau (1 litre).

- 1799 : La première définition est maintenue, mais il est ajouté : le mètre et le kilogramme en platine, déposés aux Archives, sont les étalons définitifs. Ces étalons matériels, représentants de définitions théoriques, deviennent la base pratique et légale du système métrique décimal.
- 1960 : La définition du mètre change avec les moyens optiques. Le mètre est alors défini comme la longueur égale à 1 650 763, 73 longueurs d'onde dans le vide d'une radiation orangée émise par l'isotope 86 du krypton. (11ème CGPM). La relative imprécision de la précédente définition, 0,1 mm sur 1 mètre, a mené à la recherche d'une nouvelle définition du mètre. Cette nouvelle définition ayant été adoptée par la 11ème CGPM, sa précision était estimée être 100 fois supérieure à celle de la précédente.
- 1967 : La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
- 1983 : Le mètre est défini comme la longueur du trajet parcouru par la lumière, dans le vide, pendant une durée de 1/299 792 458 seconde (17 ème CGPM)). Sa précision potentielle est celle de l'unité de temps 100 000 fois meilleure que celle de l'unité de longueur fondée sur le krypton et elle pourra sans doute être encore améliorée. Cette nouvelle définition s'appuie sur une constante physique universelle et non plus sur un objet matériel ni même sur une radiation émise par une substance particulière. Elle aurait donc de très bonnes garanties de pérennité. Le kilogramme reste défini par le prototype international de 1889. Mesurer avec précision une masse ne pose pas de problème, la fidélité des comparateurs est excellente, elle est de l'ordre de 10^{-8} et 10^{-9}.

2.1.2 Définitions actuelles

Unité de longueur : le mètre (m) Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. (Définition de la 17 ème Conférence Générale des Poids et Mesures de 1983)

Unité de masse : le kilogramme (kg) Le kilogramme est l'unité de masse. Il est égal à la masse du prototype international du kilogramme. (Définition de la 1 ère CGPM de 1889 et de la 3 ème CGPM de 1901)

Unité de temps : la seconde (s) La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. (Définition de la 13 ème CGPM de 1967)

Unité de courant électrique : l'ampère (A) L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10 -7 Newton par mètre de longueur. (Définition du CIPM en 1946 et approuvée par la 9 ème CGPM de 1948).

Unité de température thermodynamique : le kelvin (K) Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. (Définition de la 13 ème CGPM de 1967. Il est décidé également par la 13 ème CGPM que l'unité kelvin et son symbole K sont utilisés pour exprimer un intervalle ou une différence de température).

Unité de quantité de matière : la mole (mol) La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules. (Définition de la 14 ème CGPM de 1971).

Unité d'intensité lumineuse : la candela La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10 -12 hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watt par stéradian Définition de la 16 ème CGPM de 1979

2.1.3 Unités dérivées

Deux unités sont ajoutées aux unités fondamentales, ce sont les unités d'angles, le radian et le stéradian.

Les unités dérivées sont exprimées en fonction des unités de base. Certaines ont reçu des noms particuliers, souvent de scientifiques ayant travaillé dans les domaines concernés. Leur symbole est alors une lettre majuscule.

Certaines unités, fréquemment utilisées, ont été maintenues pour des raisons de commodité. Ce sont :

La minute, l'heure et le jour pour le temps ; le degré, la minute et la seconde pour l'angle plan ; le litre pour le volume ; la tonne pour la masse ; le bar pour la pression ; le degré Celsius pour la température ; le watt-heure pour l'énergie ; la calorie pour l'énergie thermique.

GRANDEUR	FORMULE	UNITÉ	SYMBOLE
Angle plan	α	radian	rad
Angle solide	Ω	stéradian	sr
Surface	$S = x^2$	mètre carré	m^2
Volume	$V = x^3$	mètre cube	m^3
Masse volumique	$r = m/V$		$kg.m^{-3}$
Vitesse	$v = x/t$		$m.s^-1$
Accélération	$a = v/t$		$m.s^{-2}$
Force	$F = m.a$	Newton	N
Travail Énergie	$W = F.x$	Joule	J
Puissance	$P = W/t$	Watt	W
Pression	$p = F/S$	Pascal	Pa
Fréquence	$f = 1/T$	Hertz	Hz
Moment d'une force	$Mt = F.x$		N.m
Tension	u	Volt	V
Résistance	$r = u/i$	Ohm	W
Quantité d'électricité	$q = i.t$	Coulomb	C
Capacité électrique	$C = q/u$	Farad	F
Induction magnétique	$B = F/(i.x)$	Tesla	T
Flux magnétique	$F = B.S$	Weber	Wb
Inductance électrique	$L = F/i$	Henry	H
Flux lumineux	$j = I.W$	Lumen	lm
Éclairement	$E = j/S$	Lux	lx

Tab. 2.1: Tableau des principales unités dérivées

Chapitre 3

Rappel sur les incertitudes

— http ://perso.wanadoo.fr/mathieu2/cours/unite.htm —

Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur du même type prise pour unité.

Les mesures directes sont celles obtenues directement en utilisant un appareil. Les mesures obtenues à l'aide d'une formule, donc d'un calcul, sont appelées mesures indirectes.

Soit à mesurer une certaine grandeur A. Le nombre trouvé est x, mais ce n'est en général pas la véritable valeur X . x est une valeur approchée de X.

La valeur maximale de l'erreur que l'on peut faire dans la mesure est Δx, appelée incertitude absolue. Cette incertitude est due à la qualité des instruments, à leur réglage (zéro), au soin apporté à la lecture par l'opérateur, etc..

On peut donc écrire :

$$X = x \pm \Delta x \qquad \text{ou} \qquad x - \Delta x < X < x + \Delta x \tag{3.1}$$

Exercice: *On mesure une longueur avec une règle graduée en mm. On trouve 29,7 cm ou 297 mm. Que faut-il écrire ?*

On peut écrire $l = 297 \pm 1$ mm. Il est absurde d'écrire $297,2 \pm 1$ mm. Si on mesure une deuxième longueur avec la même règle : $l' = 23 \pm 1$ mm.

On appelle incertitude relative le rapport $\Delta x/x$. C'est un nombre sans dimension puisque c'est le rapport entre deux grandeurs identiques.

Exercice: *Calculer les incertitudes relatives des deux mesures précédentes.*

3.1 Calcul d'incertitudes

Les incertitudes sur les mesures se répercutent sur le résultat.

On utilise la formule mathématique définissant la différentielle totale exacte d'une fonction f de plusieurs variables $(x,\, y,\, z)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{3.2}$$

Ceci nous permet de prédire l'incertitude totale donnée par :

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z \tag{3.3}$$

Exercice: *On a mesuré deux longueurs, 29,7 cm et 13,2 cm à 1 mm près. Donner l'incertitude sur la somme et la différence.*

Exercice: *Calculer le volume d'un cylindre de hauteur* $h = 29,7$ *mm et de diamètre* $d = 25,2$ *mm.*

$V_{min} = 14,646337$ mm ; $V_{max} = 14,98122$ mm ; $V = 14,81315$ mm.
Le premier chiffre après la virgule est différent, il est incertain, l'incertitude porte sur lui donc les chiffres suivants n'ont aucune signification.

$$14,6 \text{ cm}^3 < V < 15,0 \text{ cm}^3 \tag{3.4}$$

Donc $\Delta V = 0,2 \text{ cm}^3$ (0,167).

On peut aussi passer par la différentielle logarithmique :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta d}{d} \tag{3.5}$$

On trouve $\Delta V/V = 0,0113035$ et $\Delta V = 0,1655 \text{ cm}^3$.

Quand g est de la forme $g = kx^a y^b z^c$, on a :

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|a\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|b\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|c\frac{\Delta z}{z}\right| \tag{3.6}$$

3.2 Chiffres significatifs

Un chiffre significatif est un chiffre nécessaire pour exprimer la valeur d'une grandeur mais aussi sa précision.

Un chiffre est significatif quand :

– il est différent de zéro
– c'est un zéro compris entre deux chiffres significatifs (2032)
– c'est un zéro final non nécessaire (2,310)

Un zéro n'est pas significatif quand il est devant. Exemples : 0124 : 3 chiffres significatifs, 0,023 : 2 chiffres significatifs car 2,3 cm ou 0,023 m doivent être deux résultats équivalents donc les zéros devant, qu'il y est virgule ou pas, ne comptent pas, ils ne sont pas significatifs.

Quand le zéro est à la fin, cela dépend. 29,0 cm et 29 cm expriment la même valeur mais pas la même précision : dans le premier cas, il y a 3 chiffres significatifs (la précision est le mm), dans le second, il y a 2 chiffres significatifs (la précision est le cm). 290 mm : on ne sait pas si le zéro est significatif ou pas (précision de la mesure). Donc un zéro est ambigu quand il se trouve à la fin et est nécessaire (290) pour exprimer la valeur. Pour remédier à cela, on utilise la notation scientifique ($2{,}9.10^2$ pour 2 chiffres significatifs ou $2{,}90.10^2$ pour 3 chiffres significatifs).

Dans un problème, il faut exprimer les résultats avec le même nombre de chiffres significatifs que la donnée qui en comporte le moins, mais jamais moins de deux. En général c'est deux ou trois.

Si on arrondit par défaut ou par excès : il faut pousser le calcul à un chiffre de plus que celui du résultat.

Exercice: *Le volume d'une sphère est de 14,5 cm^3. Trouver son rayon.*

Le résultat donné par la calculatrice est : $R = 1,5127243$ cm La précision de la donnée est le dixième de cm^3 donc le volume est compris entre 14,4 cm^3 et 14,6 cm^3. Avec $R = 1,52$ cm, on trouve $V = 14,71$ cm^3 donc un résultat en dehors de la fourchette. Avec $R = 1,51$ cm, on trouve $V = 14,42$ cm^3 donc un résultat dans la fourchette Avec $R = 1,50$ cm, on trouve $V = 14,1$ cm^3 donc un résultat en dehors de la fourchette. On voit donc bien que la précision de la donnée étant de 3 chiffres, il est suffisant d'exprimer le résultat avec 3 chiffres aussi, en arrondissant par excès ou par défaut.

3.3 Eléments de statistique

On est dans le domaine de la statistique.

3.3.1 Valeur probable

On appelle moyenne , où valeur probable, d'une grandeur la moyenne arithmétique de toutes les mesures effectuées, c'est-à-dire la somme de toutes les mesures divisée par le nombre de mesures.

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \tag{3.7}$$

Cette valeur sera d'autant plus proche de la vraie valeur X que n, le nombre de mesures, sera grand. Pour $n = \infty$, on a $X = \overline{x}$.

Exercice: *Pour le volume du cylindre, on a trouvé : 15,0 ; 14,7 ; 14,5 ; 14,9 ; 14,8 ; 14,8 ; 14,6 ; 14,8 ; 14,7 ; 14,9 ; 17,1. Donner l'estimation du volume et son incertitude*

17,1 est écartée car manifestement fausse. $V = \overline{x} = 14,78\ \text{cm}^3$.
Pour trouver l'incertitude absolue on prendra l'écart entre cette moyenne et les valeurs extrêmes. C'est-à-dire ici 0,2 cm^3 car on a 15 et 14,6 qui encadre 14,8 cm^3.

$$V = 14,8 \pm 0,2\ \text{cm}^3 \tag{3.8}$$

3.3.2 Répartition des valeurs

Pour nous renseigner sur la qualité des mesures, on se sert de ce qu'on appelle la variance que l'on note σ^2.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n} \tag{3.9}$$

La racine carrée de s s'appelle l'écart type ou écart quadratique moyen. Si n est supérieur à 30, on a :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}} \tag{3.10}$$

Si n est plus petit que 30, ce qui est souvent le cas en physique, il faut alors estimer l'écart-type par une grandeur s ou σ_{n-1} qui vaut :

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{3.11}$$

La qualité d'une méthode de mesurage s'apprécie par son écart type. Cette valeur joue le même rôle que l'incertitude absolue lors d'une seule mesure, la quantité $\sigma/\overline{x}$ jouant le rôle de l'incertitude relative.

GRANDEUR	DIMENSIONS
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Surface	L^2
Volume	L^3
Masse volumique	ML^{-3}
Vitesse	LT^{-1}
Accélération	LT^{-2}
Force	MLT^{-2}
Travail	ML^2T^{-2}
Puissance	$ML^{-2}T^{-3}$
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$
Fréquence	T^{-1}

Tab. 3.1: Dimension des principales unités

3.4 Equations aux dimensions

Une force F s'exprime en newtons. Si on revient au trois unités de base du système SI (masse, longueur, temps) la force F, d'après la formule F = m.a est égale à une masse multipliée par une longueur divisée par un temps au carré :

On dit que les dimensions de la force sont 1 par rapport à la masse, 1 par rapport à la longueur et -2 par rapport au temps. On écrit symboliquement F = MLT-2.

Pour une relation il faudra toujours que son premier membre ait les mêmes dimensions que le second : on dira qu'elle est homogène.

Pour les unités, on peut dire que le newton est équivalent au kg.m.s-2 dans le système SI.

Dans un problème, avant de trouver le résultat avec des nombres (application numérique) il faut le trouver avec des lettres représentant les différentes grandeurs (expression littérale). On peut alors vérifier si l'expression trouvée est homogène, c'est-à-dire si les deux membres ont les mêmes dimensions. Ceci permet de savoir si la formule trouvée est possible ou non, ou bien de trouver l'unité d'une grandeur si on connaît celles des autres.

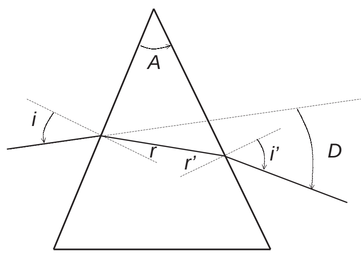
Chapitre 4

Exercices

4.1 Prisme

Vous avez été amené à trouver une expression pour l'indice du prisme en fonction de son angle au sommet A, et de l'angle de déviation maximum D_m :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$



Question 1 Mesurer A et D_m pour le prisme qui vous est présenté.

On trouve A=42°2' et D_m=23°53'.

Question 2 Evaluer les imprecision sur les mesures de A et D_m que vous avez effectuées[1].

Les mesures de A et D_m sont à plus ou moins une minute si on travaille avec un goniomètre et plus ou moins un degré si on mesure avec un rapporteur.

[1]On écirt habituellement le résultat d'une mesure sous la forme : $l = (1.25 \pm 0.05)$ m

Question 3 En considérant les valeurs maximum et minimum de A et D_m, donner une estimation des valeurs maximum et minimum de n.

On a :

$$n^+ = \frac{\sin\left(\frac{A^+ + D_m^+}{2}\right)}{\sin\frac{A^-}{2}} \qquad \text{et} \qquad n^- = \frac{\sin\left(\frac{A^- + D_m^-}{2}\right)}{\sin\frac{A^+}{2}}$$

Ce qui donne :

$$n^+ = 1.5181 \qquad \text{et} \qquad n^- = 1.5159$$

Question 4 On note Δn, l'incertiture sur n. Si on veut présenter le résultat sous forme $n \pm \Delta n$, proposer une expression de Δn en fonction des valeurs maximum et minimum de A et D_m.

Donc pour n : $n = 1.5170 \pm 0.0011$ pour le goniomètre et $n = 1.5170 \pm 0.0753$ pour le rapporteur.

Question 5 Proposer une expression littérale de Δn en fonction de A, D_m, ΔA et ΔD_m.

On a une fonction f de plusieurs variables : x, y,... On aimerait savoir quelle est la variation de cette fonction df_x quand l'une de ses variables, prenons x, varie de dx ; toutes les autres variables étant considérées comme constantes. C'est justement la notion de dérivée partielle que nous "réinventons" :

$$df_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Si on veut avoir la variation de f associé à la variation de chacune de ses variables, il faut ajouter tous les df_i précédents. Cette fois, nous "réinventons" la notion de dérivée totale exacte :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + ...$$

Dans notre cas, on calcule la variation dn associée aux variations dA et dD_m :

$$dn = \frac{\partial n}{\partial A} dA + \frac{\partial f}{\partial D_m} dD_m + ...$$

Ce qui donne :

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{A+D_m}{2}\right) - \cot\left(\frac{A}{2}\right)\right] dA + \frac{1}{2}\cot\left(\frac{A+D_m}{2}\right) dD_m$$

La fonction cotangente est décroissante donc le premier terme est négatif. L'incertitude totale est la somme des valeurs aboslues de chacun des termes dérivés partielles. Si on note ϵ l'erreur de mesure sur D_m ($\epsilon = dD_m = dA/2 = 30''$), on a finalement :

$$\frac{\Delta n}{n} = \left[\cot\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}\cot\left(\frac{A+D_m}{2}\right)\right] \epsilon$$

Ce qui donne finalement :

$$n = (1.5170 \pm 0.0004)$$

Exercice: *Un rectangle mesure 27 m de longueur et 14,5 m de largeur. Les mesures étant faites à 0,5 m près, calculer la plus grande valeur (valeur par excès) et la plus petite (valeur par défaut) de l'aire de ce rectangle. Quelle est l'incertitude absolue ? Donner le résultat.*

$A_m = 371$ m^2 et A_M =412.5 m^2. Donc $\Delta A = (A_M - A_m)/2 = 20.75 \rightarrow 21$ m^2. Technique classique : $\Delta A = L\Delta l + l\Delta L = 20.75 \rightarrow 21$ m^2. $A = (392 \pm 21)$ m^2.

Exercice: *Une sphère creuse a pour rayon extérieur 15 cm ; la cavité est une sphère de 5 cm de rayon. a) Quel est le volume de la partie pleine ? b) La précision des mesures* *étant de 1 mm, trouver l'incertitude du résultat.*

$V = 4/3\pi(R^3 - r^3) = 13613$ cm^3. $\Delta V = 4/3\pi(3R^2 + 3r^2)\Delta r = 314$ cm^3. $V = (13610 \pm 320)$ cm^3.

Exercice: *On mesure le volume d'un morceau de fer parallélépipédique de trois façons. a) On le mesure avec une règle graduée au mm. On peut apprécier la demi division. On trouve L = 2,6 cm, l = 1,25 cm et h = 5,45 cm. Trouver son volume, ainsi que les incertitudes absolue et relative. b) On se sert d'un pied à coulisse de précision 1/10 de mm. On trouve L = 2,62 cm, l = 1,24 cm et h = 5,46 cm. Mêmes questions. c) On se sert maintenant d'une éprouvette. Une division correspond à 1 cm3. On apprécie la demi-division. On trouve, par déplacement d'eau, un volume de 17,5 cm3. Mêmes questions. d) Quelle est la meilleure méthode ?*

$V = Llh$. $\Delta V/V = \Delta h/h + \Delta L/L + \Delta l/l$.
$\Delta V_1/V = 6.8\%$, $V_1 = (17.7 \pm 1.2)$ cm^3.
$\Delta V_2/V = 1.4\%$, $V_2 = (17.74 \pm 0.24)$ cm^3.
$\Delta V_3/V = 2.8\%$, $V_3 = (17.5 \pm 0.5)$ cm^3.

Exercice: *La relation qui donne la période T d'un pendule de torsion dont la constante de torsion est C est : $T = 2\pi\sqrt{(J/C)}$; J étant son moment d'inertie et C la constante de torsion du fil. a) Trouver T si J=0,10 kg.m^2, $C = 0,107.10^{-2}$ m.N.rd^{-1}. b) Sachant que l'erreur commise sur J est de 0,01 kg.m^2, trouver celle sur T.*

$T = (61 \pm 3)$ kg.m^2.

Exercice: *Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieurs (D_1) et extérieur (D_2) et on trouve : $D_1 = 19,5 \pm 0,1$ mm et $D_2 = 26,7 \pm 0,1$ mm. Donner le résultat de la mesure et sa précision.*

$e = (D_2 - D_1)/2$. $e = (3.6 \pm 0.1)$ m.

Exercice: *Calculer l'aire d'un cercle dont le rayon vaut $R = 5,21 \pm 0,01$ cm. Quelle est la précision du résultat obtenu ?*

$A = (85.3 \pm 0.3)$ cm^2.

Exercice: *Trouver la dimension et l'unité du facteur k, la constante de gravitation universelle qui entre dans la formule : $F = k(mm')/d^2$; F est la force qui s'exerce entre deux masses m et m' distantes de d.*

$[k] = MLT^{-2}/M^2L^2 = M^{-1}L^3T^{-2}$. Unité : $\mathrm{m^3/s^2/kg}$.

Exercice: *Montrer que la relation $1/2mv^2 = qU$ est possible. m : masse, v : vitesse, q : charge électrique, U : tension.*

$[1/2mv^2] = ML^2T^{-2}$. $q = It$ et $P = UI$ donc $[qU] = MLT^{-2}L$

Exercice: *Quelle est la grandeur égale à ρgh avec ρ : masse volumique ; g : accélération de la pesanteur ; h : hauteur.*

$[\rho gh] = ML^{-3}LT^{-2}L = MLT^{-2}/L^2 \rightarrow$ Pression.

Exercice: *L'ascension capillaire h, dans un tube de rayon r, d'un liquide de masse volumique ρ, de constante capillaire A, en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g, a pour expression : $h = 2A/(r\rho g)$. Trouver les dimensions et l'unité de la constante A.*

$[A] = LLM/L^3LT^{-2} = MT^{-2}$. Unité : $\mathrm{kg/s^2}$.

Exercice: *La formule $P - P' = 4A/R$ donne la différence de pression $P - P'$ entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon de rayon R. A est la constante capillaire dont on a déterminé les dimensions dans l'exercice précédent. Vérifier l'homogénéité de cette formule.*

$[P - P'] = ML^{-1}T^{-2}$. $[4A/R] = MT^{-2}L^{-1}$. All right !!!

4.2 Exercices : énoncés

Un rectangle mesure 27 m de longueur et 14,5 m de largeur. Les mesures étant faites à 0,5 m près, calculer la plus grande valeur (valeur par excès) et la plus petite (valeur par défaut) de l'aire de ce rectangle. Quelle est l'incertitude absolue ? Donner le résultat.

Une sphère creuse a pour rayon extérieur 15 cm ; la cavité est une sphère de 5 cm de rayon. a) Quel est le volume de la partie pleine ? b) La précision des mesures étant de 1 mm, trouver l'incertitude du résultat.

On mesure le volume d'un morceau de fer parallélépipédique de trois façons. a) On le mesure avec une règle graduée au mm. On peut apprécier la demi division. On trouve L = 2,6 cm, l = 1,25 cm et h = 5,45 cm. Trouver son volume, ainsi que les incertitudes absolue et relative. b) On se sert d'un pied à coulisse de précision 1/10 de mm. On trouve L = 2,62 cm, l = 1,24 cm et h = 5,46 cm. Mêmes questions. c) On se sert maintenant d'une éprouvette. Une division correspond à 1 cm3. On apprécie la demi-division. On trouve, par déplacement d'eau, un volume de 17,5 cm3. Mêmes questions. d) Quelle est la meilleure méthode ?

La relation qui donne la période T d'un pendule de torsion dont la constante de torsion est C est : $T = 2\pi\sqrt{(J/C)}$; J étant son moment d'inertie et C la constante de torsion du fil. a) Trouver T si J=0,10 kg.m^2, $C = 0,107.10^{-2}$ m.N.rd^{-1}. b) Sachant que l'erreur commise sur J est de 0,01 kg.m^2, trouver celle sur T.

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieurs (D_1) et extérieur (D_2) et on trouve : $D_1 = 19,5 \pm 0,1$ mm et $D_2 = 26,7 \pm 0,1$ mm. Donner le résultat de la mesure et sa précision.

Calculer l'aire d'un cercle dont le rayon vaut $R = 5,21 \pm 0,01$ cm. Quelle est la précision du résultat obtenu ?

Trouver la dimension et l'unité du facteur k, la constante de gravitation universelle qui entre dans la formule : $F = k(mm')/d^2$; F est la force qui s'exerce entre deux masses m et m' distantes de d.

Montrer que la relation $1/2mv^2 = qU$ est possible. m : masse, v : vitesse, q : charge électrique, U : tension.

Quelle est la grandeur égale à ρgh avec ρ : masse volumique ; g : accélération de la pesanteur ; h : hauteur.

L'ascension capillaire h, dans un tube de rayon r, d'un liquide de masse volumique ρ, de constante capillaire A, en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g, a pour expression : $h = 2A/(r\rho g)$. Trouver les dimensions et l'unité de la constante A.

La formule $P - P' = 4A/R$ donne la différence de pression $P - P'$ entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon de rayon R. A est la constante capillaire dont on a déterminé les dimensions dans l'exercice précédent. Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Chapitre 5

Travaux pratiques

5.1 Mesure de densité

Vous disposez de plusieurs solides constitués de différents matériaux. Trouver une technique pour mesurer leur densité. Évaluez avec précision l'incertitude des résultats.

5.2 Mesure de température

Vous disposez d'une sonde platine dont les caractéristiques sont détaillées dans le document-ci joint. Imaginez un montage électrique pour mesurer la mise en chauffe du four qui est sur la table. Évaluez avec précision l'incertitude des résultats.

5.3 Mesure de distance

Pour détecter la présence d'une mouche le caméléon est particulièrement bien équipé. Il peut en effet regarder dans deux directions opposées â la fois, devant et derrière lui par exemple. Mais voit-il deux images distinctes ? Oui, dans une certaine mesure, car dans son cerveau les informations visuelles des deux yeux ne se rencontrent jamais, même lorsque ceux-ci sont orientés dans la même direction et se fixent sur la mouche. Il n'a donc pas de vision stéréoscopique binoculaire ni de perception des reliefs et ne peut percevoir ainsi les distances comme nous le faisons. pourtant, il rate rarement son coup de langue ! Il utilise un système de mesure de distance par analyse de l'accommodation de l'oeil. La mise au point pour obtenir une vision nette se fait par déformation du cristallin : Le cristallin est étiré par les muscles de l'iris, qui possèdent dés capteurs d'étirement que le cerveau du caméléon utilise pour mesurer la distance qui le sépare de sa proie. Les informations oculomotrices des deux yeux sont en outre analysées et comparées entre elles par le cerveau, ce qui améliore encore la précision de la mesure de distance. Le principal outil de son comportement prédateur étant la détection de mouvements, il n'a pratiquement pas besoin d'images. Voir deux images distinctes, une seule ou pas du tout n'a donc aucune incidence sur la précision de son attaque. Il en est de même pour le guidage de son coup de langue : une simple mesure de la distance d'accommodation suffit. En revanche, disposer de deux yeux indépendants augmente nettement ses chances de détecter la moindre mouche qui se pose dans le feuillage qui l'entoure, même derrière son dos !

Tel le caméléon, mesurez la distance entre la source de lumière et l'écran fixes placés sur la table... Évaluez avec précision l'incertitude des résultats.

Chapitre 6

Eléments de réponses aux énigmes

6.1 Mesures de distances

6.1.1 Texte sur Bohr et Rutherford

Grâce au petit texte sur la mesure de la hauteur d'un bâtiment, nous allons présenter différentes méthodes et leurs incertitudes associées. Imaginons que ce bâtiment fasse une hauteur $H = 100$ m. On donne la masse du baromètre : $m = 1$ kg et sa hauteur $h = 1$ m, sa vitesse $\overrightarrow{v}$ et son accélération $\overrightarrow{a}$. La gravité au niveau du sol est $g = 9.81$ m/s^2. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur unitaire dirigé du haut vers le bas.

Longeur de corde

On pend le baromètre à une corde, on la laisse pendre jusqu'en bas et on mesure la longeur l de cette corde. En tenant compte (1) de l'élasticité de la corde sous son propore poids ($\pm 3\%$), et, (2) du moyen de mesure pour évaluer l'incertitude (± 2 m), on a finalement :

$$H = (100 \pm 5) \text{ m}$$

Temps de chute

La relation de la dynamique associée au baromètre donne : $m\overrightarrow{a} = mg\overrightarrow{x}$. On projette sur la verticale et on intègre deux fois, on trouve :

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

Le temps t est le temps de chute à partit du moment où le baromètre est laché au sommet du bâtiment sans vitesse initiale selon $\overrightarrow{x}$.

L'incertitude sur H :

$$\frac{\Delta H}{H} = 2\frac{\Delta t}{t}$$

On tient compte de l'erreur de chronométrage (0.5 s) et du temps mis par le son pour remonter ($t = H/v_{son} = 0.3$ s) : $t = (4.5 \pm 0.8)$ s. Ce qui donne finalement :

$$H = (100 \pm 35) \text{ m}$$

Longeur de l'ombre

Imaginons que les rayons du soleil soit inclinés de telle façon que l'onbre du bâromètre soit de 10 cm. On a :

$$\frac{H}{H_{ombre}} = \frac{h}{h_{ombre}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta H_{ombre}}{H_{ombre}} + \frac{\Delta h_{ombre}}{h_{ombre}} = 0.002 + 0.04 + 0.008 = 0.05$$

Ce qui donne finalement :

$$H = (100 \pm 5) \text{ m}$$

Nombre de marques

On note le nombre n d'unités "baromètre" pour aller du bas en haut et on a : $H = nh$. A chaque mesure on commet une erreur de 2 cm et à chaque étage de 10 cm. Ce qui donne :

$$H = (100 \pm 5) \text{ m}$$

Mesure de gravité

On effectue un pendule à l'aide du baromètre et d'une corde de longueur $l = 1$ m. En modèlisant le baromètre par une masse ponctuelle. On applique la relation de la dynamique et on la projète sur la tangente à la trajectoire :

$$mg\alpha = ml\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Ce qui donne :

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

La mesure de la période $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ donne une estimation de g.

On trouve facilement une expression qui donne la variation de g avec l'altitude z :

$$g(z) = g_0\left(1 - 2\frac{z}{R_t}\right)$$

où $R_t = 6370$ km est le rayon de la terre. La hauteur du bâtiment est donc donnée par :

$$H = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{T(z)^2}{T_0^2}\right)$$

Si on a $g = 9.81$ m/s^2 au pieds du bâtiment, on aura $T_0 = 2.00504$ s. Au sommet du bâtiment, on aura : $T(H) = 2.00498$ s. Le problème est que l'on est incapable avec un chronomètre classique au dixième de seconde de mesurer avec une précision de 10^{-4} s. La mesure est donc impossible par cette méthode ! ! !

Pendule géant

On a toujours la relation : $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ donc :

$$H = g\frac{T^2}{4\pi^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta H}{H} = 2\frac{\Delta T}{T}$$

Ce qui donne finalement :

$$H = (100 \pm 10) \text{ m}$$

Variation de pression

On sait que la pression varie avec la hauteur suivant la loi :

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

ρ étant la masse volumique de l'air. On a donc :

$$H = \frac{p_0 - p(H)}{\rho g} \qquad \text{et} \qquad \delta H = 2\frac{\Delta p}{\rho g}$$

Si on fait une mesure à 25 Pa près, on a finalement :

$$H = (100 \pm 5) \text{ m}$$

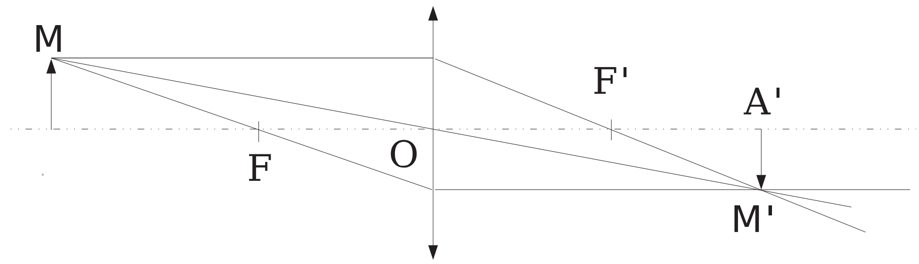
6.1.2 Mesure de distance par focométrie

On peut redémontrer facilement la formule de congugaison d'une lentille convergente de focale $f = OF'$ à partir du shéma suivant :

Prenons un repère orthonormé centré en O et d'axe Ox paralèlle à (OA'). Soit un objet AM de hauteur h. L'équation de la droite $(F'M')$ est : $y = -(h/f)x + h$. L'équation de la droite (OM') est : $y = -(h/AO)x$. Le point M' est à l'intersection de ces deux droites. Il est définit par :

$$-\frac{OA'}{f} + 1 = -\frac{OA'}{AO}$$

En divisant tout par OA', on obtient la relation de conjugaison :



$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{AO} = \frac{1}{f}$$

Le but de cette manipulation était de mesurer une distance inconnue OA'. La première manipulation à faire consiste en la mesure de la distance focale de la lentille utilisée par la méthode du miroir. On trouve : $f = (1,00 \pm 0,01)$ m.

Par ailleurs, on mesure une distance $AO = (1,374 \pm 0,005)$. Ce qui donne :

$$OA' = \frac{1}{1/f - 1/AO} = 3.67 \text{ m}$$

Pour trouver l'incertitude sur OA', on calcule la différentielle totale de OA' :

$$dOA' = \frac{1/f^2}{(1/f - 1/AO)^2} df - \frac{1/AO^2}{(1/f - 1/AO)^2} dAO$$

On obtient donc pour l'incertitude sur OA' :

$$\Delta OA' = \frac{\Delta f}{(1 - f/AO)^2} + \frac{\Delta AO}{(AO/f - 1)^2} = 0.4 \text{ m}$$

La mesure de la distance recherchée est donc de :

$$OA' = (3.67 \pm 0.17) \text{ m}$$

6.2 Mesures de température

6.2.1 Les différents appareils

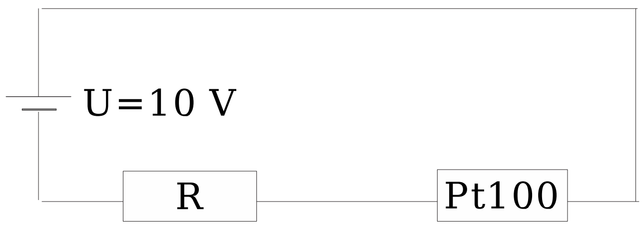
On trouve parmi les nombreux appareils représentés :

- Le thermoscope florentin. On utilise la relation des gaz parfaits : $PV = nRT$ et on mesure le volume. Si le thermoscpe est parfairement étaloné, on a $\Delta T/T = \Delta V/V = 1/50 = 2\%$. Pour des températures situées autours de l'ambiante, on a une lecture à 6°C près.
- Le thermomètre à mercure. On utilise la dilation d'un liquide. La précision peut aller jusqu'à 0.1°C.

– La thermistance. On mesure les variations de résistance électrique en fonciton de la température. Elle est précise à quelques centième de degrés pour les plus chères.
– Le thermocouple. On utilise l'effet Seabeck qui donne une ddp proportionnelle à l'écart de température entre deux soudures. La précision peut aller jusqu'au dixième de degré.
– Le bilame n'est pas un appareil de mesure de température. Il se déforme grâce à la dilatation différente de deux métaux et peut actioner un intérupteur. La présision se situe autours de quelques dizièmes de degrés pour les meilleurs.
– Le piromètre optique. Il capte le rayonnement électromagnétique d'une source de chaleur et le convertie en une tension liée à la température. Il est plus efficasse à haute température et est précis au degré pour les meilleurs.

6.2.2 Montage avec une sonde Pt100

On réalise le montage suivant :



Pour éviter de déteriorer le courrant qui passe dans la sonde, on limite le courrant à quelque milliampère grâce à la résistance $R = 1000\ \Omega$. La résitance de la sonde est donnée par :

$$R_{Pt100} = R\frac{U_{Pt100}}{U}$$

D'autre part, on a un tableau qui donne la correspondance entre R_{Pt100} et la température θ. En traçant la courbe, on s'apperçoit que c'est une belle droite d'équation :

$$\theta = aR_{Pt100} + b$$

avec $a = 2.67$ et $b = -267$. On a donc finalement :

$$\theta = aR\frac{U_{Pt100}}{U} + b$$

L'incertitude sur la mesure de température vaut donc :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta - b} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta U_{Pt100}}{U_{Pt100}} + \frac{\Delta U}{U} = 0.01 + 0.01 + 0.01$$

La mesure de température se fera donc à $\Delta T = 10°\text{C}$.

6.3 Mesures de masses volumiques

6.3.1 Le thermomètre de Gallilé

Le principe du thermomètre de Gallilé est basé sur la poussée d'Archimède qui dit que tout corps plongé dans un liquide ressent de la part de ce liquide une poussé verticale du bas vers le haut d'intensité égale au poids du volume de liquide occupé par le corps.

Si on plonge dans un liquide des sphères rigides en verre dont le poids et le volume sont bien contrôlés et dont la masse volumique se situe autours de celle du liquide, les sphères se placeront en surface ou au fond du fluide selon la température de celui-ci. En effet, sa densité va évoluer en fonction de la température, changeant ainsi l'intensité de la poussée d'Archimède. Les boules les plus denses couleront, les moins denses flotteront.

La température est celle de la boule supérieure et la précision est la moitié de l'écart entre deux boules.

6.3.2 Mesure de masse volumique par picnomètre

Pour mesurer la masse volumique ρ d'un solide dont la géomètrie est connue, on le pèse (masse m) et on mesure ses dimensions. Dans le cas d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, la masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2 h}$$

L'incertitude de cette mesure est donnée par :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

Dans le cas d'un cylindre en téflon, on trouve :

$$\rho = (2150 \pm 25)\ \mathrm{kg/m^3}$$

Pour avoir une mesure plus précise, on peut utiliser un picnomètre que l'on va peser :
- seul rempli d'eau : m_1
- rempli d'eau avec le solide à côté : m_2
- seul rempli d'eau avec le solide dedans : m_3

La masse volumique du solide est alors données par :

$$\rho = \rho_{eau}\frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3}$$

Pour trouver l'incertitude sur la mesure, on utilise la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{d(m_2 - m_3)}{m_2 - m_3} = dm_2\left(\frac{1}{m_2 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_3}\right) - \frac{dm_1}{m_2 - m_1} + \frac{dm_3}{m_2 - m_3}$$

On passe aux incertitudes en posant : $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \epsilon = 0.001$ g (incertitude sur une pesée) et $\Delta m_3 = \epsilon' = 0.005$ g (incertude de remplissage). Ce qui donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\epsilon + \epsilon'}{m_2 - m_3}$$

On trouve finalement :

$$\rho = (2154 \pm 3)\ \mathrm{kg/m^3}$$